Paweł z Krakowa: *Szachy i matematyka – najciekawsze zagadnienia: ciekawostki, łamigłówki i zadania*

Wstęp

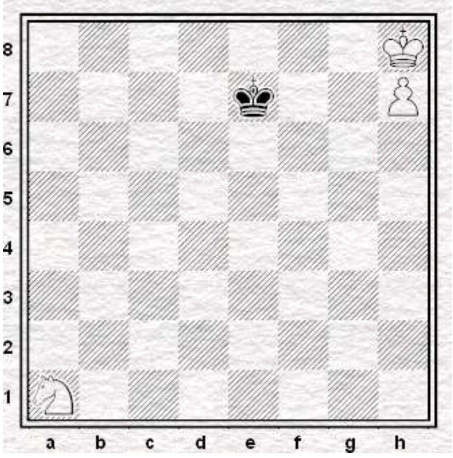
Gra w szachy przypomina wpatrywanie się w bezkresny ocean,
gra w warcaby - spoglądanie w głąb bezdennej studni

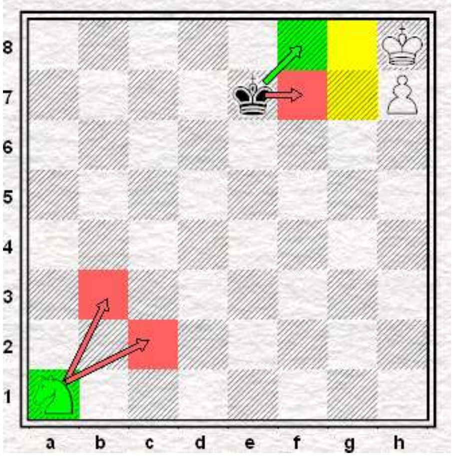
Marion F. Tinsley

Kolor i centrum

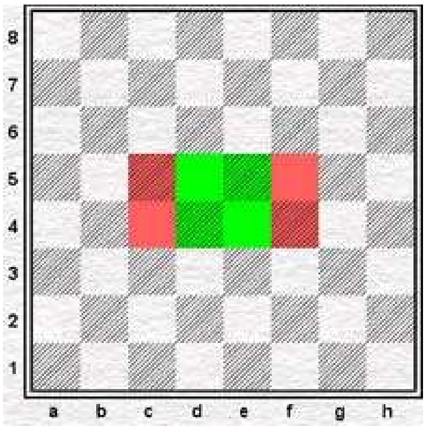
Najpierw należy przejść do numeracji pól szachownicy. Wygodnie jest ponumerować je „rzędami od lewej do prawej”' (i tak by pole *a1* miało numer 1, zaś pole *h8* miało numer 64) Dla przykładu: pole *f3*, które jest w trzecim rzędzie będzie mieć numer 22). I teraz kiedy każde pole ma już swój numer, to wtedy można dla danej figury określić funkcje: f; f(x) zlicza pola, które są pod kontrolą tej figury będącej na polu o numerze x. Inną też wartą uwagi jest funkcja g; g (x, y) to jest minimalna ilość ruchów, które należy zrobić by dana figura z pola o numerze x mogła znaleźć się na polu o numerze y. I tak np: wieża ustawiona na *c4* kontroluje 15 pól, więc f(27)=15); g: dla gońca wystarczy jeden ruch, by dojść z *a1* na *h8* więc g (1, 64)=1, itd.
Uwagi: Termin „Figura kontroluje pole” oznacza w tym przypadku, że albo stoi ona na tym polu albo może wykonać ruch na to pole. W odniesieniu do funkcji f i g możliwy jest też zapis rozszerzony np: f(c4)=f(27)=15 lub g(a1, h8)=g(1,64)=1.

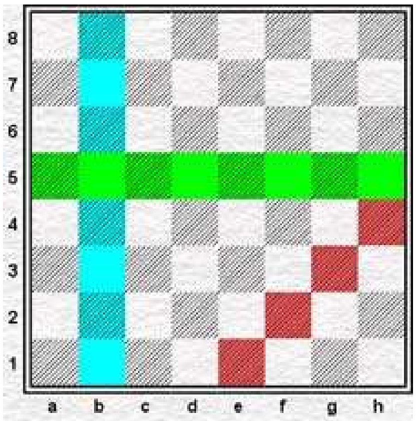
Gdy chodzi o temat koloru, to ten został oryginalnie ujęty w jednym z opracowań dotyczących gier: *„W dawnych Indiach w VII wieku naszej ery grywano w szaturangę, a potem w szatrang (tak nazywały się gry - przodkowie dzisiejszych szachów) na planszy, podzielonej na 64 jednakowe pola, mające tę sama barwę. Gra ulegała przeobrażeniom, rozwijała się długo jednak grywano w nią na jednobarwnej planszy. [...] ta złożona z pól jasnych i ciemnych to wynalazek późniejszy, który zmienił wygląd gry, a nie jej zasady. [...]*
Zapewne szachy dwubarwna szachownicę przejęły od warcabów, można więc tę plansze nazywać warcabnicą.” [5]

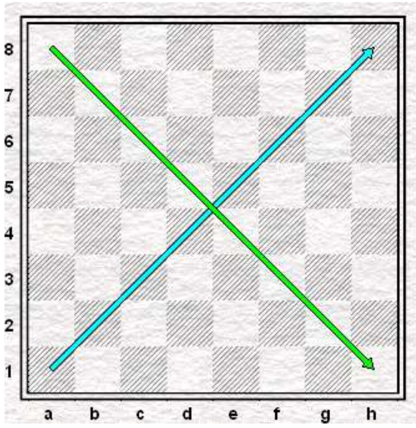




Przykład: Typowym motywem „operowania kolorem" będzie prosta, lecz pouczająca końcówka: białe mają w niej króla (na *h8*), skoczka (na *a1*) i piona (na *h7*); a czarne mają jedynie króla (na polu *e7*). Zaczynają czarne i mogą w tej ciekawej pozycji nie wypuścić białego króla z rogu, i tym samym uzyskać remis. Aby to osiągnąć król musi na przemian chodzić po polach *f7* i *f8*. A zatem remis daje im wyłącznie 1... *Kf8*. Wtedy po każdym następnym ruchu czarny król znajdzie się na polu tego samego koloru co pole na jakim aktualnie stoi skoczek. Ten zaś nie może dzięki temu „wytrącić króla z rytmu". Łatwo można się też przekonać, że po 1. ... *Kf7* białe szybko wygrają.







(Diagram lewy powyżej). Zaznaczono tu kolorem zielonym tzw. *ścisłe centrum*, czyli kwadrat złożony z czterech pól: *d4, d5, e4, e5*. Można je jeszcze poszerzyć dołączając do niego pola: *c4*, *c5* , *f4*, *f5*, (które zaznaczono na czerwono) i wtedy uzyska się tzw. *centrum rozszerzone* złożone z ośmiu pól.
(Diagram środkowy powyżej). Zamalowany został piąty rząd (kolorem zielonym) oraz druga kolumna (kolorem niebieskim). I wreszcie przekątna *e1-h4* narysowana kolorem czerwonym. Inna nazwa na przekątną to „ukośna/skośna" lub „diagonala".
(Diagram prawy powyżej). Są dwie najdłuższe przekątne, znane także jako *główne*: *a1-h8* i *a8-h1*. Odpowiednio nazywają się: czarnopolowa i białopolowa.

Figury

Koń jaki jest, każdy widzi!

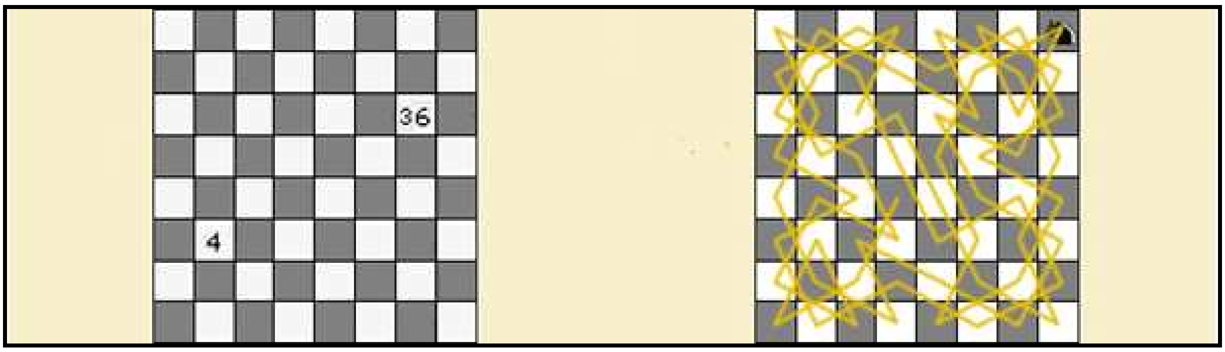
Skoczek i goniec

Trajektorie Skoczka

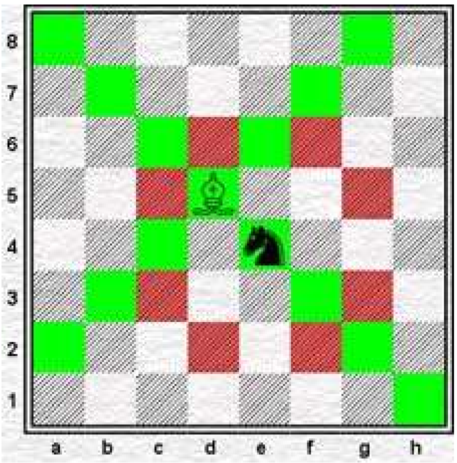
Historycznie po raz pierwszy motyw ten pojawia się w poemacie *Kavyalankara* poety kaszmirskiego Rudraty (IX w.), w którym układ akcentów sylabicznych odpowiada drodze skoczka po planszy 4x8. Ścisłego sformułowania problemu dokonał Brook Taylor ok. 1700 r., a pierwsze rozwiązanie podał Abraham de Moivre. Wielu wybitnych matematyków interesowało się tymże zagadnieniem (np. L. Euler). Trochę później, między innymi dzięki wynikom uzyskanym przez H.C. Warnsdorffa (1823 r.) zaczęto szukać algorytmów do budowy ścieżki skoczka (ma on obejść całą szachownicę (na każdym polu stając dokładnie raz; a jeśli uda mu się wrócić na pole startowe to taką ścieżkę nazywa się *zamkniętą*) - na planszach innych niż 8x8 (w tym także i na nieskończonych!). Istnieje wiele wyników teoretycznych opisujących takie „konikówki”: kiedy istnieją i jak je znajdywać. Poniżej przykład ścieżki na planszy 8x8. Ułożył ją Carl Jänisch*. Jest ona ciekawa ze względu na to, iż posiada symetrię środkową: jeśli ponumeruje się kolejno wszystkie pola marszruty konika (pole *d4* ma wartość 1, *c2* wartość 2, *a1* wartość 3 ...itd.), to każde dwa pola symetryczne względem środka szachownicy (np. *b3* i *g6*) będą mieć przypisane dwie liczby, których różnica wyniesie 32. (więcej na ten temat: Odsyłacze IV i VIII)

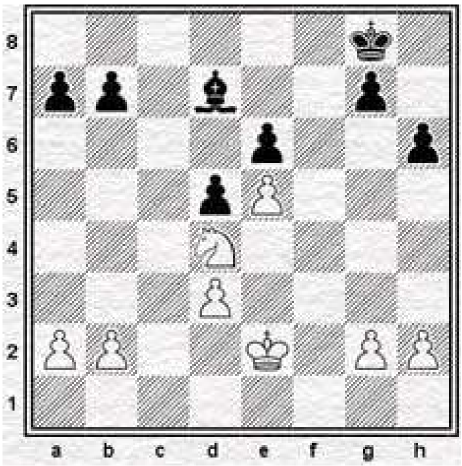
[* rosyjski szachista, pochodzenia fińskiego, napisał w 1837 r. pracę *Découvertes sur le cavalier aux échecs* (*Studia nad skoczkiem szachowym*); ten teoretyk debiutów był też twórcą znanego gambitu w partii hiszpańskiej].

d4, c2, a1, **b3**, c1, a2, b4, d3, c5, a6, b8, d7, f6, e8, g7, h5, g3, h1, f2, e4, d6, b5, a7, c8, e7, g8, h6, f5, h4, g2, e1, f3, e5, f7, h8, **g6**, f8, h7, g5, e6, f4, h3, g1, e2, c3, d1, b2, a4, b6, a8, c7, d5, e3, g4, h2, f1, d2, b1, a3, c4, a5, b7, d8, c6.



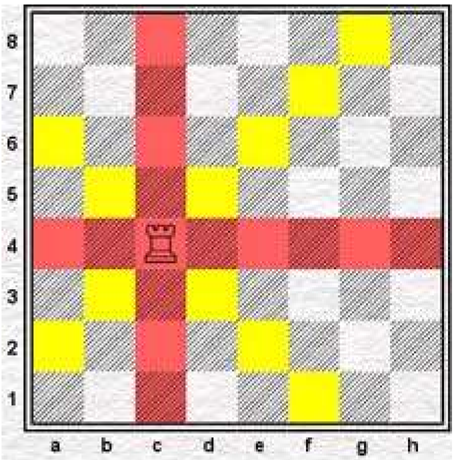
Przykład praktyczny

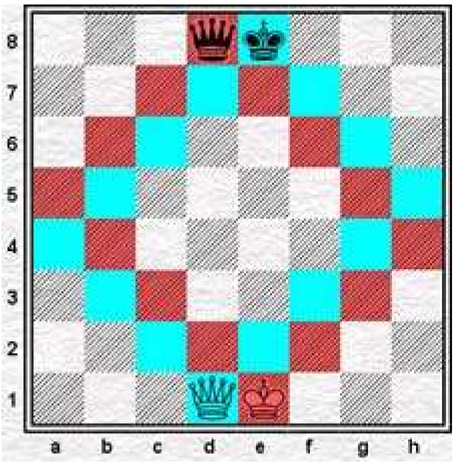




(Diagram lewy). Goniec i skoczek są to figury lekkie. Skoczek jest bardzo zwinny a możliwość przeskakiwania nad innymi figurami nadaje mu wyjątkowy status. Wykonując ruch zawsze zmienia kolor pola. Goniec odwrotnie: zawsze porusza się po polach tego samego koloru i z tego powodu jest „ślepy" na połowę pól szachownicy. Mimo to jest od skoczka szybszy (bo np. dla gońca g(1,64)=1 a dla skoczka g(1,64)=6). Przedstawiono tu działanie ustawionych w centrum obu figur: skoczek stoi na *e4* i kontroluje 9 pól (tj. f(e4)=f(29)=9), zaś goniec stoi na *d5* i kontroluje 14 pól (tj. f(d5)=f(36)=14). W tym porównaniu wypadł on lepiej!
(Diagram prawy). Mały przyczynek do dyskusji pt. „skoczek czy goniec ?" przykład został zaczerpnięty z partii *Mir Sultan Khan - S. Tartakower* (Semmerling-Baden, 1931 r.). Czarne zagrały tu 26. ... K*f7* i po dość długiej walce uzyskały przegraną; skoczek okazał się jednak silniejszy. Zanim prześledzi się jak przebiegała dalej gra (Odsyłacz IX), to warto dokonać „mini analizę" tej pozycji. Można w niej rozważyć istotne elementy:
- ustawienie obu królów: (biały król bliżej centrum, + -)
- struktura pionów (m.in. kolory pól na jakich stoją – ewentualne słabości struktury pionowej): (obie strony mają je rozbite na trzy wysepki: po dwa piony w każdej, odstały pion *e6*)
- siła obu figur: (skoczek jest świetnie ustawiony, a manewry gońca utrudniają piony *d5* i *e6*, + -)

Wieża, hetman i król



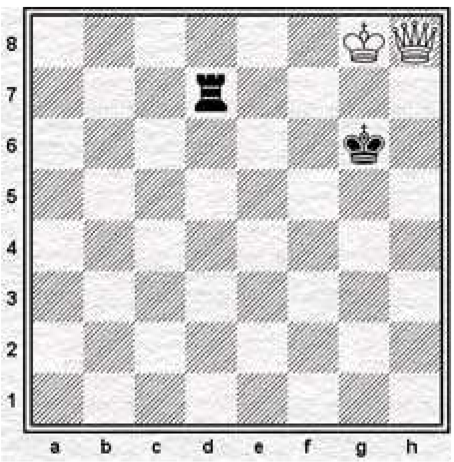


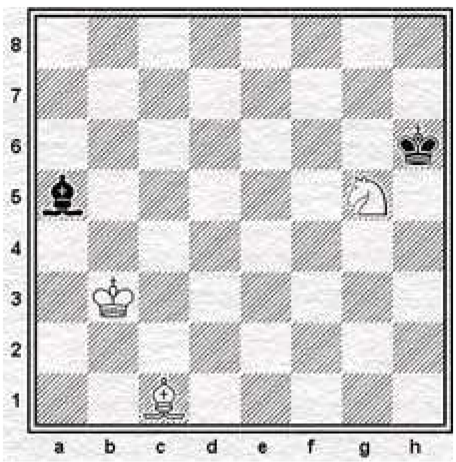
(Diagram lewy) Wieża zalicza się wraz z hetmanem do figur ciężkich. Jest to figura, której prawdziwa siła ujawnia się na ogół w końcówce, gdy jest dla niej trochę więcej wolnej przestrzeni. „*Siódme niebo*”: tak się czasem nazywa sytuację gdy obie białe wieże wtargną na siódmy rząd, przejmując nad nim kontrolę i zamykając króla w pułapce. Wyróżnione są tu pola, które kontroluje wieża ustawiona na polu *c4* (to jest ponownie odnotowany fakt, że dla wieży f(c4)=f(27)=15): zamalowując je kolorem czerwonym. Hetman stojący na tym samym polu ma dodatkowo pod kontrolą 11 innych pól (zamalowanych na żółto) tj. dla hetmana f(c4)=f(27)=26). Hetman jest najsilniejszą z figur, maksymalna wartość f dla niego wynosi 28; gdy stoi on w *ścisłym centrum* to może (zakładając że plansza jest pusta) wykonać aż 27 różnych posunięć (czyli kontroluje wtedy niemalże połowę pól szachownicy!). (Diagram prawy) pokazuje typową sytuację związaną z geometrią planszy 8x8. Przed rozpoczęciem partii, biały król i czarny hetman (jak i czarny król i biały hetman) stoją na polach tego samego koloru. To zaś umożliwia typowy i występujący czasami w debiutach motyw: szach hetmanem po bandzie H*a4*+ i H*h5*+ (białe) (oraz H*a5*+ i H*h4*+ czarne). Jak widać ataki te będą możliwe, gdy odpowiednie przekątne zostaną dla hetmana otwarte, tj. gdy przeciwnik wykona ruch pionem *d* bądź *f*.

Przykład praktyczny

(Diagram lewy) (Dr Euwe). Hetman jest silniejszy od wieży, ale w tej konkretnej pozycji czarne wiążą swe nadzieje z tym iż biały król został zepchnięty do rogu, a czarna wieża skutecznie go blokuje. Grozi mat (W*d8*) więc pierwszy ruch jest oczywisty: 1. H*h4*. Czarne mogą teraz dać szacha 1. ... W*g7*+ i wtedy powstaje ciekawy motyw „przesuwania pozycji”: 2. K*h8* czarne muszą 2. ... W*f7*, (gdyż np. po 2. ... K*f7* ? 3. H*f4*+ stracą wieżę; podobnie 2. ...W*c7*? 3. H*g3*+, itp.). A więc dalej gra się toczy tak: 3. H*g4*+ K*f6* 4. K*g8* W*e7* itd. W końcu doprowadzi to do układu: białe: K*b8*, H*b4*; czarne: K*a6* W*a7*. Wtedy po W*a8*+ czarne próbują uzyskać pat, lecz po odpowiedzi K*c7* przygrywają (# w 2). Warto tu też zauważyć, że po 1... W*d5* mogą się one bronić trochę dłużej...

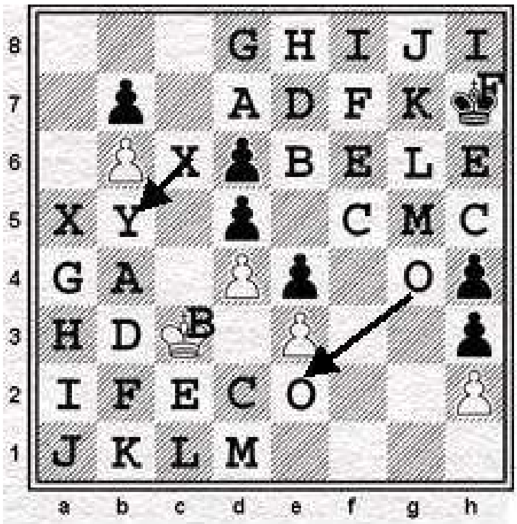
(Diagram prawy) z „*De Schaakwereld*”. Król jest figurą najważniejszą, a przy tym najsłabszą. W początkowej fazie partii warto go zabezpieczyć (osłona pionowa, roszada). Dopiero zwykle pod koniec partii może on brać aktywny udział w grze, a czasem nawet odegrać w niej decydującą rolę; w tej pozycji biały król rozpoczyna skuteczny pościg (dzięki groźbie szacha z odsłony) za gońcem stojącym na *a5*. Po 1. *Ka4* czarne muszą zagrać 1. ...*Gb6* gdyż jest to jedyne „niezaminowane” pole. Wtedy jednak po 2. *Kb5* odpowiedź 2. ... *Ga7* znów jest wymuszona, a po 3. *Ka6* zostaje już tylko 3. ... *Gb8*. Pościg kończy 4. *Kb7*: zawstydzony goniec nie ma już dokąd uciec - zginie w następnym ruchu!





Przykład teoretyczny (końcówka dra Ebersza)*

Końcówka jest niezwykła ze względu na swój matematyczny aspekt. W pionkówkach strona słabsza musi zwykle pamiętać o tzw. *opozycji*, tj. takim balansowaniu królem by nie oddawać przeciwnikowi przestrzeni. Ale tutaj białe mają w strukturze swych pionów dwie „dziury” przez które może wtargnąć czarny król: są to układy pól „X-Y” i „O-O” (zaznaczone na diagramie strzałkami). Z kolei biały monarcha nie może wejść do obozu przeciwnika (czarne nie mają „dziur”). Białe mogą jednak zachowywać „równowagę przestrzeni”, poprzez to że zawsze pójdą królem na pole oznaczone tą literą, co to, na którym aktualnie stoi czarny król (teraz powinien więc iść na pole *F*, tj. wykonać ruch 1. K*b2*). Trzymając się tej metody uzyskają remis (można to w sposób ścisły wykazać; analizę podali Duchamp i Halberstadt, w pozycji: *L' Opposition et les Cases conjuguées*). Jeśli zagrają inaczej to przegrają; np w wariancie: 1. K*c2* K*h6* 2. K*d2* K*h5* 3. K*e2* K*g4* 4. K*f2* K*f5*! tracą piona *b6*; itp.
([1] str. 19), cyt. dr K. Ebersz, *Magyar Sakkvilag*, 1940)



Uwagi końcowe: Matematyczne wartości figur w szachach są takie: skoczek (3 p), goniec (3 p), wieża (5 p) i hetman (9 p) oraz pion (1 p), tj. król przed rozpoczęciem partii dysponuje armią w sile 39 p. Król nie ma określonej wartości punktowej: jest bezcenny! [*współczesne podręczniki szachowe podają, iż król w końcowej fazie partii szacowany jest pomiędzy siłą gońca a wieży – dop. Redaktor T.P.*]

Mimo, że liczby te bywają pomocne, są to jednak tylko umowne wartości, a w trakcie rozgrywania partii należy brać pod uwagę wszelkie niuanse pozycji (czasami np. siła piona może wrosnąć, a siła hetmana może zmaleć itd.) oraz mieć na uwadze, że ostatecznym celem gry nie jest przeprowadzanie korzystnych wymian. Jest nim mat! [*Autor pokazuje odniesienie matematyczne do szachów, niemniej paradoksalnie to właśnie dzięki korzystnym wymianom najczęściej wygrywa się partie; chociaż oczywiście należy podkreślić, że powybijanie wojska przeciwnika nie jest celem gry, lecz ważnym a zarazem bardzo prostym środkiem do jego osiągnięcia – dop. Redaktor T.P.*]

Tym niemniej można powiedzieć, że na ogół:
- dwa pionki są słabsze od skoczka (bo 1+1 <3)
- dwie wieże są silniejsze od hetmana (bo 5+5 >9)
- dwa gońce są silniejsze od wieży (bo 3+3 >5)
- skoczek i wieża są słabsze od hetmana (bo 3+5 <9) itd.

Ustawienia figur

Mini maxy są to problemy polegające na zbadaniu:
- ile tych samych figur można maksymalnie umieścić na szachownicy, tak by żadne dwie z nich się nie atakowały? (max)
- ile tych samych figur potrzeba, by każde pole było kontrolowane przez jedną z nich? (min)

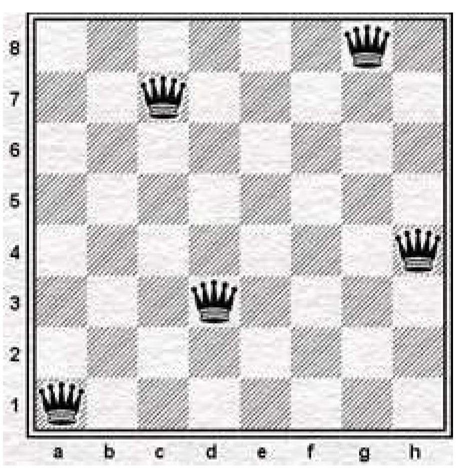
Niektóre z nich są banalne (np. problem max dla króla), a inne nieznośnie trudne (np. problem min dla skoczka). Należy podkreślić wyjątkową rolę wieży (max=min=8), realizuje ten sam układ: osiem wież na diagonali *głównej*. Poniżej w tabeli znajduje się rozwiązanie (dla szachownicy 8x8), i przykładowa ilustracja tego problemu dla hetmana:

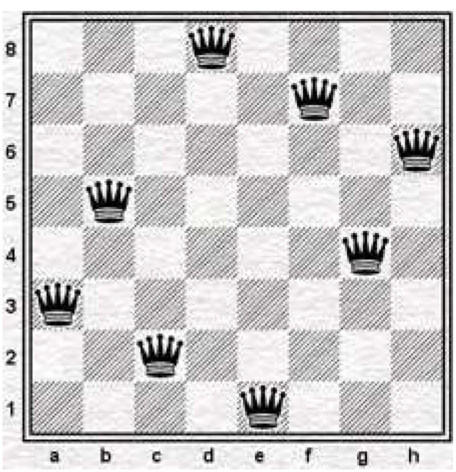
min=5 (diagram lewy), choć nie jest łatwo pokazać, że cztery hetmany nie wystarczą, istnieje aż 638 istotnie różnych rozwiązań *;

max= 8 (diagram prawy), jest jasne, że więcej niż osiem hetmanów nie może być, istnieje 12 istotnie różnych rozwiązań;

[* *Dwa ustawienia są istotnie różne jeśli nie można otrzymać jednego z nich z drugiego poprzez obrót lub odbicie lustrzane*]

Figura	max	min
skoczek	32	12
goniec	14	8
wieża	8	8
hetman	8	5
król	16	9



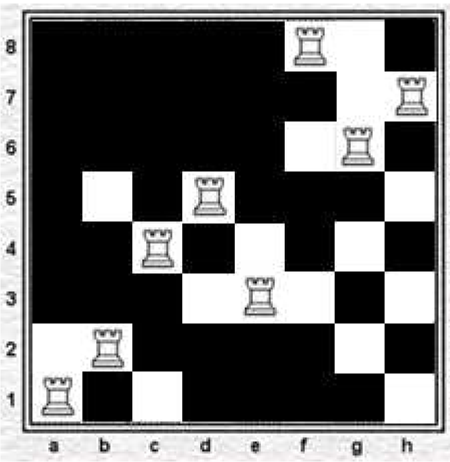


Problemy kojarzeń (ustawienia).

W kombinatoryce "*Problem kojarzenia*" występuje najczęściej w tej formie: „*Należy przydzielić pewną ilość pracowników do wykonywania określonych zawodów, zgodnie z ich kompetencjami, i tak by każdy zawód został "obstawiony" dokładnie jeden raz”*. Z tego ujęcia przechodzi się do pokazanego tu „modelu szachowego” poprzez utożsamienie „pracownicy=wieże” i „białe pola=kompetencje”. Istnieje w tym zakresie rozbudowana teoria matematyczna (m. in. Twierdzenie „matrymonialne” Halla, twierdzenia Landaua o turniejach, itp.), w której silnym narzędziem jest tzw. *wielomian szachowy*.

W tych zagadnieniach każde pole szachownicy (plansza klasyczna (8x8), ale można rozważać dowolne inne (NxN) jest pomalowane jednym z dwóch kolorów: na czarno albo na biało. Wieże mogą stać wyłącznie na białych polach (są one dozwolone), tj. nie mogą one stać na czarnych polach (są one zaminowane). Wieże należy ustawiać tak, aby spełnione były następujące warunki:
- każda wieża stoi na dozwolonym polu
- żadne dwie wieże nie atakują się

Poniżej na diagramie pokazane jest przykładowe rozwiązanie. Mogą jednak czasami istnieć inne. Będzie tak np. wtedy gdy w każdej kolumnie i w każdym rzędzie znajdą się co najmniej dwa pola dozwolone. Warunek ten jest tu spełniony i układ z diagramu można zmienić tak: wieżę z *a1* przesunąć na *a2* ; teraz w drugim rzędzie są dwie wieże, więc ta z *b2* ustawić musi się na *b5*, i dalej: wieże z *d5* na *d3*, wieże z *e3* na *e4* i na końcu wieże z *c4* na *c1*. Tak otrzyma się nowe ustawienie wież.



Potęga liczb

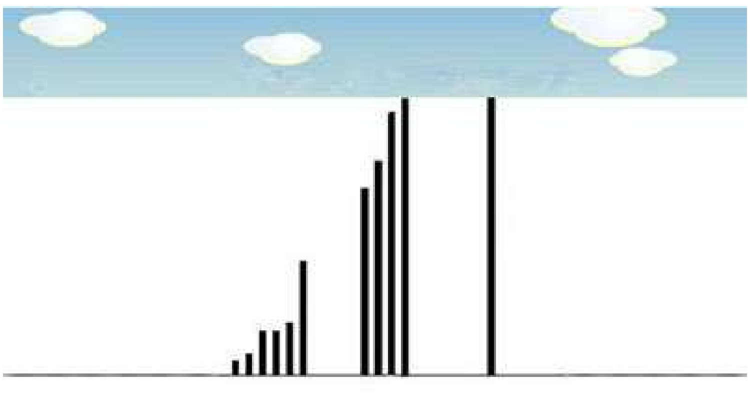
Matematycy na ogół dzielą duże liczby na trzy klasy: małe duże liczby (I piętro), średnie duże liczby (II piętro) i duże duże liczby (III piętro). Tak więc na I piętrze żyją liczby, które można zapisać cyframi. Nad nimi: na II piętrze są już liczby, które zapisuje się w postaci wykładniczej (np. liczby D_n które w zapisie dziesiętnym zbudowane są z jedynki i n zer, np. D_9 to miliard itd.). Z kolei III piętro zamieszkują liczby, które zapisuje się w inny, bardziej zawiły sposób (np. tzw. MOSER). Poniżej przykłady:

Uwagi: Liczba *q* ma 79 cyfr i jest skonstruowana przy użyciu M_{64}. Porównanie liczb dokonane zostało przez zestawienie ilości cyfr potrzebnych do ich zapisu (w układzie dziesiętnym). Jednak dwie największe z nich (tj. centylion i MOSER) nie są widoczne w całości, gdyż przekraczają już „pułap chmur”...

I piętro
2 279 184 liczba układów w pokerze
4 294 967 297 piąta liczba Fermata (F_5)
18 446 744 073 709 551 615 liczba ziaren z legendy o szachach (M_{64})
43 252 003 274 489 856 000 liczba kombinacji różnych ułożeń kostki Rubika 3x3x3
6 670 903 752 021 072 936 960 liczba możliwych układów w sudoku 9x9
808 017 424 794 512 875 886 459 904 961 710 757 005 754 368 000 000 000 rząd tzw. grupy *monstrum*

II piętro
q duża liczba pierwsza
D_{100} googol
D_{123} liczba możliwych partii szachów
D_{600} centylion

III piętro
MOSER



Po tym wstępie do różnej wielkości liczb zobaczmy najsłynniejszą legendę na temat szachów i to w jaki sposób udało się „przemycić” nieco matematyki mędrcowi, który ją wymyślił:

Legenda o wynalezieniu szachów

Mędrcowi Ben Daher, który żył około 1000 roku p.n.e. i który podobno był wynalazcą szachów, król Balhib w nagrodę za wymyślenie tak interesującej gry pozwolił na wybór wynagrodzenia. Daher czyniąc zadość żądaniu króla, odezwał się w twe słowa: „Królu! Nakaż zawiadowcy Twych spichlerzy, aby mi wydał tyle ziarenek zboża, ile się nagromadzi, gdy na pierwsze pole szachownicy położymy jedno, na drugie dwa, na trzecie cztery, na czwarte osiem i na każde następne z 64 pól szachownicy podwójną liczbę ziarnek, na poprzednim polu położonych!”. Król zdumiał się błahością prośby, wszelako nakazał, by ją spełniono (tekst legendy zaczerpnięto ze strony wikipedii).

Jakież potem było jego przerażenie, gdy stanął przed nim zmartwiony skarbnik i doniósł, że prośby bramina nie sposób wypełnić, gdyż kładąc na pierwsze pole 1 ziarno, na drugie 2, na trzecie 4, na czwarte 8 itd., na ostatnie 64 pole należałoby położyć **9 223 372 036 854 775 808** ziaren.
Łączna liczba ziaren będąca sumą szeregu geometrycznego wynosi „jedynie” ponad 18 kwintylionów, a dokładniej: **18 446 744 073 709 551 615**.

Z obrazowych wyliczeń wynika, że odpowiada to ilości zboża zebranego ośmiokrotnie z powierzchni całej kuli ziemskiej albo też mieszczącej się w spichlerzu o wysokości 4 metry szerokości na 10 metrów o długości aż 300 mln km (czyli tyle ile wynosi odległość z Ziemi na Słońce i z powrotem!). Oczywiście zasoby monarchy w żaden sposób nie były w stanie tego spełnić.

Legenda ta, nie mająca bezpośredniego związku z grą w szachy ukazuje w sposób symboliczny tkwiące w nich ogromne możliwości matematyczne.
Być może obliczenie tych wartości wydadzą się szczególnie skomplikowane, niemniej pokażemy, że to dużo prostsze niż się przypuszcza. Zatem przyjirzyjmy się temu w jaki sposób można szybko rozwiązać to zadanie (wykorzystując jedynie potęgi oraz wzór na sumę ciągu geometrycznego).

Tak więc zadanie można rozwiązać zapisując tak: założenie początkowe: na 1szym polu mamy 1 ziarnko zboża (czyli 2^0), na kolejnym dwa razy więcej niż poprzednim, a więc:
2 pole - 2 ziarnka = 2^1
3 pole - 4 ziarnka = 2^2
4 pole - 8 ziarnek = 2^3
5 pole - 16 ziarnek = 2^4

Tak więc mamy już odpowiedź na pytanie ile jest ziaren na czwartym i piątym polu. Teraz tylko musimy się zastanowić nad ostatnim polem. Szachownica ma 64 pola, więc nie ma sensu tego liczyć „na piechotę”. Zauważmy, że potęga przy liczbie 2 jest zawsze o jeden mniejsza od numeru pola, więc na ostatnim polu zapiszemy liczbę ziarnek tak: **64 pole = 2^{63}**

Mamy tutaj do czynienia z ciągiem geometrycznym o ilorazie 2. Dlatego, że każda kolejna liczba jest dwa razy większa od poprzedniej (1 jest 2 razy mniejsza od 2, następnie 2 jest 2 razy mniejsza od 4, itd.).
Można także wspomnieć, iż ciąg liczb **1, 2, 4, 8, 16, 32…** jest wyjątkowym ciągiem geometrycznym, bo on akurat ma tę ciekawą właściwość (o tym jaką: poniżej). Tak więc należy teraz dodać do siebie wyrazy tego ciągu geometrycznego i obliczyć ich sumę:

Zobaczmy, że gdybyśmy chcieli „ręcznie” ustalić ile w sumie będzie ziaren na 5 polach to musielibyśmy dodać do siebie poszczególne wartości: $\mathbf{2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 1+2+4+8+16 = 31}$

A teraz przyjrzyjmy się temu, że na kolejnym (szóstym) polu byłoby 32 (czyli 2^5) ziarna, prawda? Porównując sumę ziaren na pierwszych pięciu polach (wartość 31) oraz ilość (lecz nie sumę) tych znajdujących się jedynie na polu szóstym (wartość 32), można zauważyć wzmiankowaną wyżej właściwość (a jej ścisły dowód nie jest trudny). Mianowicie: **suma ziaren na danych (kolejnych) polach, wynosi tyle, ile ilość na polu następnym pomniejszona o 1** (ściślej: zmniejszona o pierwszy wyraz ciągu, tzn. 2^0).

Podsumowując: w naszym zadaniu pierwszy wyraz ciągu ma wartość 1, natomiast każdy kolejny jest dwa razy większy od następnego (czyli mnożony przez 2), zaś wszystkich wyrazów jest 64. Po podstawieniu do wzoru otrzymamy wartość: $\mathbf{2^{64} – 2^0}$ (albo jak kto woli $\mathbf{2^{64} – 1}$)… co daje: **18 446 744 073 709 551 615**.

Rozwiązanie problemu szachów, czyli przeanalizowanie szachów do spodu – kilka słów o tym jak określić czy w pozycji wyjściowej przy najlepszych ruchach obu stron jest remis czy też wygrana białych

Spróbujmy oszacować liczbę możliwych wariantów w partii szachowej. Jak wszyscy wiemy przy rozpoczęciu partii białe mają 20 możliwości, w odpowiedzi na to czarne posiadają także 20 możliwości ruchu, czyli w dwóch pierwszych posunięciach (*półruchach) jest dokładnie 400 różnych wariantów gry. Może się to wydawać niewielką wartością, ale zobaczmy co się dzieje dalej: ilość możliwych kontynuacji szybko wzrasta wraz z kolejnymi ruchami. Jak szybko? Poniżej widzimy ilość posunięć i liczbę możliwych kontynuacji:

po 3 posunięciach 8.902
po 4 posunięciach 197.281
po 5 posunięciach 4.865.609
po 6 posunięciach 119.060.324

Po to, aby rozwiązać to zadania należałoby napisać odpowiedni program i posłużyć się superkomputerem (a najlepiej mocą obliczeniową milionów takich komputerów połączonych w jedną sieć – tak jak w przypadku globalnej sieci Internet). Można wstępnie spróbować oszacować, ile wariantów musiałby przeanalizować komputer, aby uzyskać odpowiedź na postawione na początku pytanie:

Zakładamy, że partia trwa 50 ruchów (średnio po około 40 ruchach rozgrywka szachowa albo dobiega końca lub też obaj zawodnicy są zorientowani co do końcowego jej wyniku). W pierwszych trzech pełnych ruchach (6 półruchów, czyli 3 posunięcia białych oraz czarnych) jest nieco ponad 100 milionów wariantów, czyli 10^8. W zależności od fazy gry jest średnio około 100 do 1000 możliwości kontynuowania gry (czyli po wymnożeniu ilości posunięć białych i czarnych można uzyskać liczbę w przedziale od 100 do 1000, np. jeśli białe mają 30 możliwości po których także czarne mogą odpowiedzieć na 30 różnych sposobów, to daje to 30x30=900 różnych możliwych kontynuacji).

Po odpowiednim wykonaniu obliczeń otrzymujemy wynik*** w granicach 10^{120}. Dla ukazania skali problemu (złożoności szachów) dodajmy, że szacowana ilość atomów we wszechświecie to 10^{80}.

Zakładając, że nasz program byłby w stanie analizować z szybkością 1.000.000 wariantów na sekundę, to na przerobienie całości będzie potrzebował ok. 10^{112} lat. Jest to liczba większa, niż szacowana ilość atomów we wszechświecie i nawet przyśpieszenie obliczeń bilion razy (10^{12}) niewiele zmieni, bo nadal otrzymujemy bardzo znaczącą liczbę: 10^{100} lat.

Na pocieszenie można wspomnieć, iż liczba możliwych pozycji na szachownicy (w tym wypadku należy wyeliminować „nielegalne pozycje”, czyli chociażby takie w których obydwa króle są szachowane, liczba promowanych pionów większa aniżeli to możliwe przy danej ilości bierek, wszystkie piony jednego koloru na liniach „a” i „b”, piony czy np. wieża za barierą pionów przeciwnika, i temu podobne) waha się w granicach od 10^{38} do 10^{41}. Można przyjąć, że średnio będzie to liczba 10^{40}. Niemniej jest to wystarczająca duża liczba, która gwarantuje, że szachy mają bardzo duży potencjał (inaczej mówiąc – nie wyczerpią się szybko w sensie braku przetestowania kolejnych możliwości, jak w przypadku gry kółko i krzyżyk, gdzie przy najlepszej strategii nie jest możliwa wygrana żadnej ze stron, a zabawa kończy się po krótkim czasie, gdy jeden lub obaj z nich po chwili odkryją, że za mało jest możliwości).

W chwili obecnej są już dostępne tak zwane tablice końcówek. Są to obliczone oraz ocenione wszystkie możliwe prawidłowe pozycje, które można uzyskać w grze szachowej, przy czym jak na razie jedynie dla 6 bierek (w tym obowiązkowo zawsze oba króle). Tablice 7-bierkowe wymagałyby potężnych mocy obliczeniowych, a dodatkowo miejsca do ich zapisania. Tak więc problem „przeliczenia szachów do spodu” raczej do końca wieku nam nie grozi. Jedynym „ratunkiem” jest opracowanie komputerów kwantowych lub też wynalezienie algorytmu, który pozwoli na udowodnienie (za pomocą reguł), iż dane pozycje należą do kategorii remisowych lub wygranych.

PODSUMOWUJĄC

liczba możliwych (prawidłowych) pozycji na szachownicy: 10^{40}
szacowana ilość atomów we wszechświecie: 10^{80}
liczbę możliwych wariantów (kontynuacji) w przeciętnej partii szachowej: 10^{120}

* - półruch (ang. *ply*), to ruch wykonany przez jedną ze stron. Czyli na cały ruch (posunięcie białych i czarnych) składają się dwa półruchy.

*** Dokładniejsze obliczenia oraz wszelkie wyjaśnienia techniczne można odnaleźć na stronie http://jknow.republika.pl/szachy/szachy.html z której wykorzystano fragmenty dotyczące obliczeń.

Mam nadzieję, że te dwa przykłady (legenda i możliwości szachów) przekonują Was wszystkich o tym, iż szachy pomimo że są niewyczerpane, to są naprawdę dla wszystkich chętnych, gdyż:

Szachy są jak ocean: słoń może się w nim wykąpać, a komar napić

Matematycy a szachiści

Są dwa rodzaje ludzi, jedni są skłonni
podporządkować się okolicznościom
- ci grają w wista,
drudzy pragną kontrolować okoliczności
- ci grają w szachy!

Collins Mortimer

Wybitny matematyk angielski Godfrey Harold Hardy uznawał, że reguły gier takich jak szachy są „czystą matematyką”, ale samej grze nie przypisując większego teoretycznego znaczenia. Tym niemniej raczej każdy przyzna, że szachy „dają dużo do myślenia”. Jest też znanym faktem że w galerii szachowych mistrzów świata odnajdziemy co najmniej dwóch matematyków (Emanuel Lasker i Max Euwe). Także i dziś w gronie silnych szachistów znajdzie się ich sporo, np. Noam Elkies, czy John Nunn. Lista jest dość długa.
Niektórzy matematycy oraz informatycy są twórcami wielu świetnych gier (np. Piet Hein i John Nash (niezależnie) - *hex*, czy też Maxey Brock - *kercheck*). Inni interesują się programowaniem komputerów w celu rozwiązywania trudnych zagadnień (np. tzw. *twierdzenia o czterech barwach)* lub badania własności dużych liczb czy różnorakich „skomplikowanych obiektów”. Jeszcze innym ich zastosowaniem może być właśnie stworzenie programów grających w szachy (bądź inne gry) z człowiekiem. Pierwsze efekty takich prac przypadają na lata 50-te XX wieku (komputer MANIAC I), ale przełom dokonał się w latach 80-tych (DEEP BLUE), a intensywny rozwój w tej dziedzinie trwa do dziś. Obecnie nie są rozgrywane już pojedynki człowieka z maszyną, ponieważ nawet mistrz świata nie jest już od kilku lat w stanie wygrać z najsilniejszymi programami szachowymi.
A czy mistrzowie szachowi z powodzeniem grają też i w inne gry (np. warcaby)? Martin Gardner pisze o tym w taki oto sposób:
„Ten kto dobrze gra w warcaby, rzadko interesuje się szachami i na odwrót - dobrzy szachiści darzą warcaby podobnym brakiem zainteresowania. Są jednak co najmniej trzy godne uwagi wyjątki: Harry Nelson Pillsbury, arcymistrz szachowy, po mistrzowsku grał również w warcaby. Newell Banks był jednocześnie mistrzem gry w warcaby i szachistą najwyższej klasy. Trzecia osoba to Irving Chernev, mistrz obu gier i autor popularnych książek o szachach, który w „Chess Live and Review” z września 1979 r. napisał te słowa: „W istocie, jako dwudziestoparolatek na pięć lat porzuciłem szachy, żeby studiować warcaby. W młodości kilka razy wziąłem w tej grze straszne cięgi i postanowiłem, że nikt mnie więcej w taki sposób już nie pokona. Mogą ze mną wygrywać, ale nie w taki sposób. Chciałem zobaczyć, jak grają wielcy mistrzowie, i odkryłem, że warcaby mają wspaniałą literaturę i że mogłaby to być doskonała gra. Jest w niej dużo piękna i logiki. Postanowiłem więc napisać książkę o warcabach i zawrzeć w niej wszystko, co odkryłem podczas przerwy w szachach.”„ ([2] str. 196).

Wszystkich chętnych zachęcamy do przyjrzenia się liście nazwisk wybitnych matematyków, którzy studiowali szachy. Wystarczy wspomnieć o takich nazwiskach jak [pisownia międzynarodowa]:

Adolf Anderssen, Charles Babbage, Noam Elkies, Max Euwe, Martin Gardner, Carl Friedrich Gauss, David Hilbert, Paul Keres, Emanuel Lasker, Sam Loyd, Jonathan Mestel, John Forbes Nash, Jr., John von Neumann, John Nunn, Roger Penrose, Richard Réti, Jan Rusinek, Claude E. Shannon, Aleksandr Solzhenitsyn, Jonathan Speelman, Alan Turing, Ernst Zermelo.

Poniżej można znaleźć bardziej pełną listę wraz z postaciami, które miały związek (lub też wkład) z matematyką (lub używali matematyki jako swojego zawodu). Są na niej chociażby tacy ludzie jak filozofowie, fizycy, chemicy, inżynierowi i inni. Można się o tym przekonać zaglądając pod ten adres: http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_mathematicians_who_studied_chess

Warto na koniec podkreślić, iż zwykle matematycy (jak też osoby u ścisłych umysłach) bardzo często świetnie odnajdują się w szachach. Z pewnością szachy mogą także być pewnego rodzaju „papierkiem lakmusowym” – mogą wskazywać (potwierdzać) czy dany człowiek wykazuje i posiada umiejętności (zdolności) w zakresie wykorzystywania ścisłego rozumowania. Bowiem szachy (w odniesieniu do matematyki) to stałe porównywania, ocenianie, wnioskowanie, przewidywanie oraz zadania problemowe w postaci „jeśli… to”. Nie bez znaczenia pewnie jest również obserwowany często fakt, że szachiści bardzo często odnoszą sukcesy w szkole i w dalszej karierze (naukowej czy zawodowej). Szachy mogą także dawać wspaniałe pole do popisu dla realizowania się osobom, które pasjonują się rozwiązywaniem różnego typu zadań czy też układaniem łamigłówek.

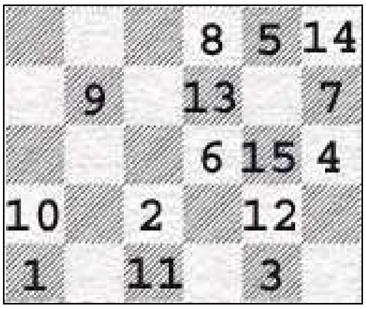
Zadania

1*. Na szachownicy 4x4 można ustawić cztery figury tak, aby tylko jedna figura była w każdym rzędzie, każdej kolumnie i w każdej przekątnej. Bierze się teraz sześcian składający się z 64 małych sześciennych klateczek. W takim sześcianie można wyróżnić 12 warstw (tj. szachownic 16 polowych ułożonych z klateczek). Dowieść, że w klateczkach można tak rozmieścić 16 figur, by w każdej warstwie był spełniony poprzednio opisany warunek.

2. Na szachownicy 9x9 ustawiono 9 wież, tak że żadne dwie się nie atakują; następnie każdą z nich, zgodnie z ruchem konika szachowego, przesunięto na inne pole. Wykazać, że wtedy będą istnieć dwie wieże które się atakują.

3. *a*) Czy można podzielić szachownicę 8x8 na 21 prostokątów o wymiarach 3x1 i jeden kwadrat mały kwadrat o wymiarach 1x1 ? Czy położenie tego kwadratu jest wtedy zdeterminowane jednoznacznie ?
b) Z szachownicy 8x8 wycięto dwa przeciwległe naroża (tj. pola *a1* i *h8*). Czy da się ją wtedy pokryć prostokątami o wymiarach 2x1 ?

4. Poniżej podany jest początkowy fragment zamkniętej ścieżki skoczka na planszy 6x5. Należy odtworzyć dalszy jej przebieg oraz zbadać jakie są jej własności;



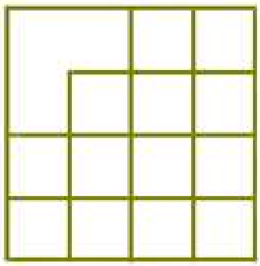
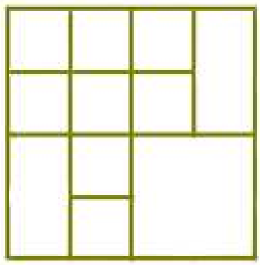
5. *a*) Można rozważyć funkcję *h*, h(x,y,z) to jest minimalna ilość ruchów, które należy zrobić by dana figura z pola o numerze x mogła przemieścić się na pole o numerze z, i znaleźć się po drodze na polu o numerze y. Uzasadnić że h jest uogólnieniem funkcji g.
b) Dla każdej z figur obliczyć h(a1,d4,h8) i porównać z g(a1,h8)
c) Czy jest możliwe, aby h(x,y,z) = 8 ?

6. W jaki sposób z „geometrią szachownicy” związane są liczby:
a) 260
b) 2080
c) 3432 ?

7. Temat: „numeracja pól szachownicy”; Wypisuje się liczby z przekątnej *a1-h8*, po czym widać, że utworzą one ciąg arytmetyczny. Badając różne rzędy, kolumny i przekątne odkryć inne ciągi jakie są tu ukryte.

8*. Na szachownicy 8x8 ustawiono 17 wież. Wykazać, że istnieje wśród nich trójka wież, które wzajemnie się nie atakują.

9. Ile kwadratów jest na każdym z tych rysunków ?

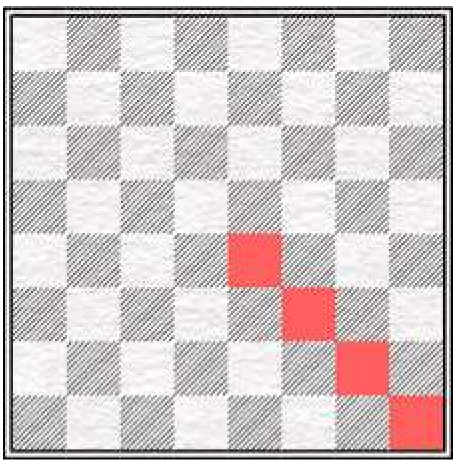
a)  *b*) 

10. Temat: „problem kojarzeń”; Z każdego ze słów ZEW, EWA, OWCA, OSA, ECHO, SOWA, OCH, CZAS wybierz po jednej literze i ułóż z nich słowo SZACHOWE

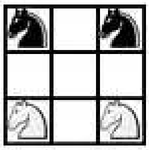
11. Nu turnieju szachowym wszyscy gracze otrzymali swe numery startowe, którymi były kolejne liczby naturalne. „Nieparzyści” grali wyłącznie z „Nieparzystymi”, zaś „Parzyści” wyłącznie z „Parzystymi”. Rozegrano 81 partii. Ile osób wzięło udział w tym turnieju ?

12. *a*) Niech dana będzie figura pseudoszachowa zwana *arlekinem*: łączy ona w sobie działanie króla i skoczka. Ustaw na planszy sytuację (dwa króle i *arlekin*) w której jest pat i inną, w której jest mat. Zbadać jak aktywna jest ta figura, obliczając f(27) i g(1,64). Czy *arlekin* jest silniejszy od wieży ?
b) Ile wynosi wartość max dla *arlekina* ?
c) Goniec jest jedyna figurą dla której g(x,y) nie zawsze jest określone. Czy jest możliwe dla tej figury g(x,y)=3 ?

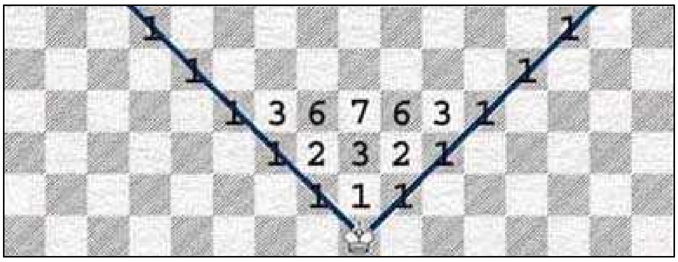
13. Podzielić szachownicę 8x8 na cztery jednakowe części, tak, by w każdej z nich znalazło się jedno zamalowane pole (rys)



14. Zagadka Guariniego: zamienić skoczki miejscami (rys):



15. *a*) Można rozważyć model nieskończonej szachownicy (nie ma numeracji kolumn i rzędów). Liczby w polach wyrażają ile jest najkrótszych ścieżek króla do tego pola (król startuje z pola na którym stoi na diagramie). Należy odgadnąć regułę według której oblicza się te liczby i uzupełnić brakujące rzędy.



b) Na takiej nieskończonej szachownicy dowolnie ustawione są dwa białe hetmany i czarny król. Jaka jest minimalna ilość ruchów potrzebna do tego, aby król został zamatowany ? Jak zagrać, aby to osiągnąć ?
c) Można rozważyć też model nieskończonej szachownicy (ale mającej jeden róg, tj. ten przy którym leży pole *a1*). Biały król, który stoi na *a1* i biała wieża, która stoi na *b2* walczą z czarnym królem stojącym na *c3* (ruch przypada na białe). Czy białe mogą zamatować czarnego króla: skoro będzie uciekał on, w poziomie bądź w pionie, byle dalej od rogu *a1*, i wydaje się że wieża go nie powstrzyma...?!

16. Czy jest możliwym ułożyć kompozycję, a jeśli tak to jak?, w której są spełnione trzy warunki:
- białe mogą wykonać ruch po którym wygrają
- białe mogą wykonać po którym przegrają
- białe mogą wykonać ruch po którym będzie pat

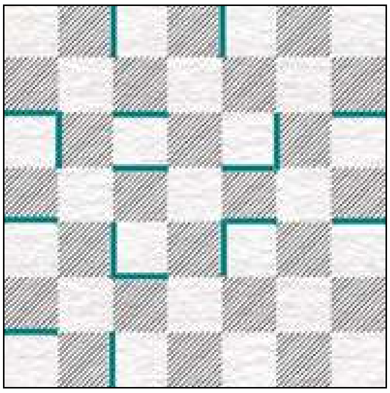
17. „Droga hetmana". Dać przykład ścieżki hetmana, która zaczyna się na *c3* a kończy na *f6*. Hetman ma wykonać pewną ilość posunięć, tak by łamana uzyskana z połączenia kolejnych pól, po których się on poruszał pokryła całą szachownicę (każde jej pole), Uwaga: przez każde pole należy przejść dokładnie jeden raz!

18. Połączyć w pary:
Osoby: G. W. Leibniz, E. Dijkstra, R. Penrose, G. Cantor, S. Ulam, C. Shannon, M. Gardner, B. Mandelbrot, L Euler, John H. Conway
Terminy: heksafleksagony, teoria informacji, spirala liczb pierwszych, najkrótsza ścieżka, automat komórkowy, fraktale, cykl w grafie, parkietaże, metoda przekątniowa, system dwójkowy

19. Sprawdzić na przykładach tzw. *prawo siódemki*: *dwa rozdzielone piony dochodzą do ostatniej linii bez promocji króla, gdy ilość pól, która je dzieli plus liczba linii, które mają za sobą wynosi 7. Jeśli suma ta jest większa od 7: piony przechodzą, a jeśli mniejsza: zostaną zatrzymane*; przy czym od tej reguły jest jeden wyjątek:

dwa piony na drugiej linii przechodzą nawet wtedy, gdy są rozdzielone przez cztery pola;
a) białe K*f5*, czarne piony *c6* i *h6*
b) białe K*g2*, czarne piony *f4* i *h4*
W obu przykładach zaczynają białe.

20. Temat: bariery; Ustaw 14 wież na szachownicy 7x7 w taki sposób, by żadne dwie z nich się nie atakowały (tj. gdy dowolne dwie wieże leżą w jednym wierszu bądź w jednej kolumnie, to muszą być rozdzielone barierą). I warunek dodatkowy: żadne dwie wieże nie mogą leżeć na polach „stykających się rogiem".



21. "Teoria rozgrywek sportowych". Klub szachowy im. *dra Sylwestra Szaradka* ma 10 członków. Co roku odbywają się rozgrywki w celu podzielenia graczy na klasy. Każdy gra z każdym i to tyle partii, aby doszło do rozstrzygnięcia (remisy nie liczą się). Mówi się, że „A" bije „B", jeśli A pobił B w tegorocznej rozgrywce. Takich rezultatów będzie po ukończeniu turnieju 45, a gracze rozpadną się na klasy, np. na takich którzy biją ośmiu; takich którzy biją siedmiu, itd. Jak łatwo zauważyć system ten dopuszcza możliwość, że „A" bije „B" , „B" bije „C" i „C" bije „A".
Pytanie dotyczy możliwych rezultatów klasyfikacyjnych. W szczególności, czy jest możliwe żeby klub rozpadł się na trzy klasy ? (zadanie to ułożył H. Steinhaus).

22. Sześć zagadek szachowych:
diagram 1 (dr Berger) Już pierwszy rzut oka na te pozycję pozwala stwierdzić, że czarny król utknął w rogu; czy białe mogą to wykorzystać i wygrać ?
diagram 2 "Siła ognia" jest po stronie białych, ale mimo to ich goniec nie jest w stanie powstrzymać od przemiany pionów *g* i *h*. Czy białe muszą przegrać ?
diagram 3 (Kasparjan) Hetman operuje po przekątnej, na której stoi wieża. Jaki będzie wynik partii ?
diagram 4 Białe mają poważny kłopot z dochodzącym pionem *f2*, mimo to uzyskują remis. Jakim sposobem?
*diagram 5 (*Kasparjan*)* Dwa piony są rozdzielone ale wspiera je goniec. Wygrana czy remis ?
diagram 6 (M. Gardner) Jakie posunięcie należy wykonać, aby nie było mata!!!?
Uwaga: W zagadkach 1-6 zaczynają zawsze białe!

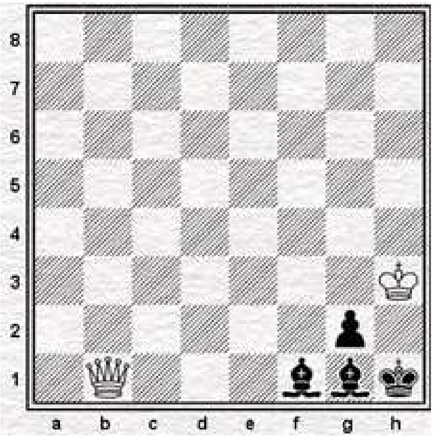


diagram 1

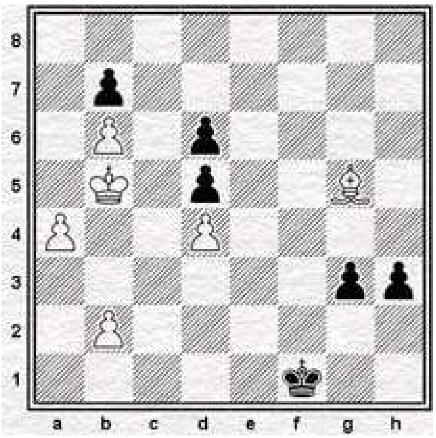


diagram 2

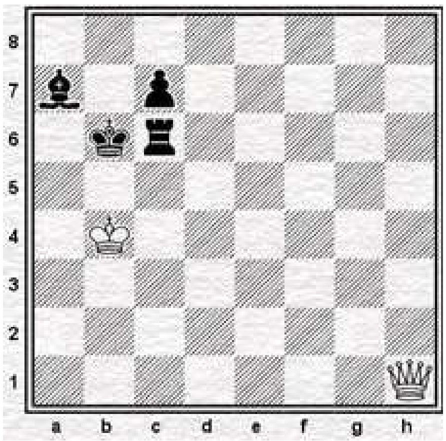


diagram 3

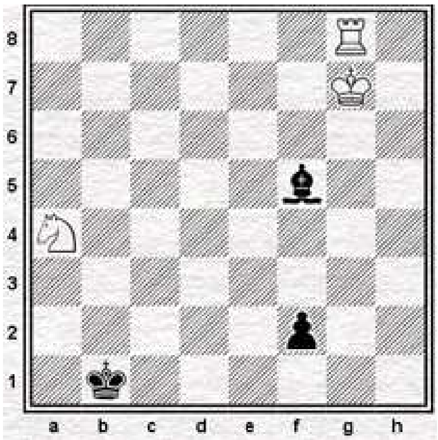


diagram 4

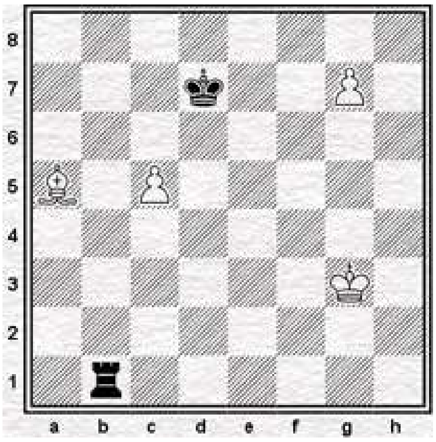


diagram 5

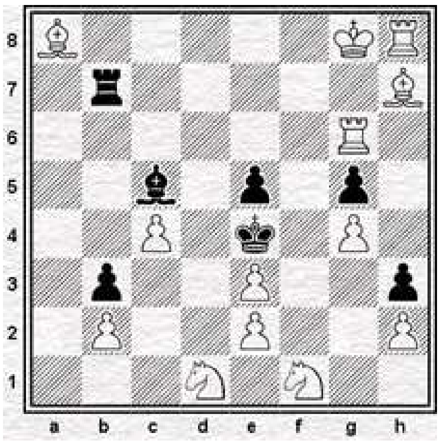


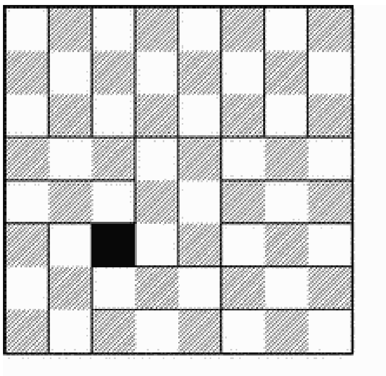
diagram 6

Rozwiązania i wskazówki do zadań

1*. Można by rozważyć 4 warstwy ułożone „jedna nad drugą". W podstawach najniższej warstwy napisane są liczby; oznaczają one numer warstwy w której znajduje się figura leżąca bezpośrednio nad danym kwadratem (w pionie). Innymi słowy położenie określonej liczby (np. 3) zakodowało ustawienie figur na danym- odpowiadającym jej piętrze (np. trzecim). Ułożenie tych liczb jest takie:
1, 4, 2, 3
3, 2, 4, 1
4, 1, 3, 2
2, 3, 1, 4

2. Każde pole na planszy 9x9 może być zakodowane jako para (x, y), gdzie współrzędne x, y są to liczby ze zbioru {1,....,9}. Zgodnie z założeniem, w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduje się dokładnie jedna wieża. Z tego wynika, że suma współrzędnych wszystkich wież jest równa:
2*(1+2+3+4+5+6+7+8+9)=90
Suma współrzędnych każdej wieży po przesunięciu jej zgodnie z ruchem konika szachowego zmieni się o 3 lub o 1. A więc suma współrzędnych nowego układu wież zmieni się o liczbę nieparzystą (gdyż suma nieparzystej ilości liczb nieparzystych jest zawsze nieparzysta), tzn. będzie różna od 90. Musza więc teraz istnieć dwie wzajemnie atakujące się wieże.
Uwaga: Dla ośmiu wież na planszy 8x8 powyższe nie zachodzi, np. można ustawić cztery wieże na przekątnej *a4-d1* oraz cztery wieże na przekątnej *e8-h5* i każdą z nich przesunąć (zgodnie z ruchem konika), tak by wszystkie znalazły się na diagonali *a1-h8*.

3. *a*) Poniżej przykład takiego podziału; położenie małego kwadratu 1x1 może być różne



b) Prostokąt 2x1 będący w dowolnym położeniu zakrywa jedno pole białe i jedno czarne. Przeciwległe narożniki są tego samego koloru, więc gdy się je usunie, to pozostaną różne ilości pól białych i czarnych. Takie pokrycie jest zatem niemożliwe.

4. Ta ścieżka ma symetrię osiową (różnica liczb w polach symetrycznych do siebie względem pionowej prostej połowiącej planszę wynosi 15)

29	20	23	8	5	14
22	9	28	13	24	7
19	30	21	6	15	4
10	27	2	17	12	25
1	18	11	26	3	16

5. *a*) Uogólnienie polega na tym, że h(x,y,y)= g(x,y)
b) Szukane wartości są równe odpowiednio: dla króla 7; dla skoczka 6; dla gońca 2; dla hetmana 2, dla wieży 4
Uwaga: wartości g(a1,h8) i h(a1,d4,h8) pokrywają się dla skoczka i króla, a różnią się dla pozostałych figur
c) tak, np. dla skoczka h(a1,a8,d8)=8

6. *a*) *wskazówka*: konikówka Carla Jänischa
b) 2080=8*260=1+2+3+....+62+63+64
c) liczba wszystkich dróg króla z *a1* do *h8* pod warunkiem, że król porusza się tylko „na prawo" lub „do góry".

7. Na diagonali głównej *a1-h8* stoją liczby 1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64. Biorąc np. pierwszą kolumnę uzyska się inny ciąg arytmetyczny: 1, 9, 17, 25, 33, 41, 49, 57 .
Warto zauważyć też że jeśli x, y są to liczby z pól leżących symetrycznie względem środka szachownicy, to x+y=65.

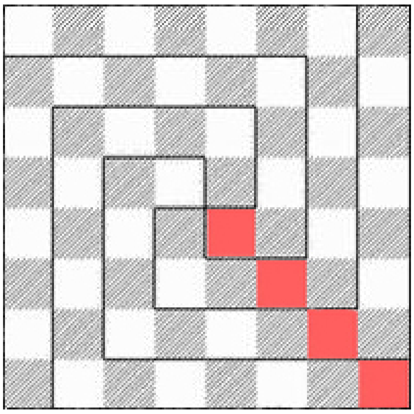
8. Skoro ustawionych jest 17 wież, to musi istnieć kolumna w której będą 3 (lub więcej) wieże. Niech to będzie kolumna **X**. W pozostałych siedmiu kolumnach jest co najmniej 17-8=9 wież. Musi więc istnieć kolumna **Y** (różna od **X**), w której leżą co najmniej dwie wieże. W pozostałych sześciu kolumnach jest co najmniej 9-8=1 wieża. Istnieje więc kolumna **Z** (różna od **X** i **Y**), w której jest jedna wieża (bądź więcej). Do tej wieży **WZ** z kolumny **Z** da się więc dobrać wieżę **WY** z kolumny **Y** leżącą w innym niż ona rzędzie. I na koniec z kolumny **X** można dobrać wieżę **WX** leżącą w innym niż one (**WY** i **WZ**) rzędzie.
Uwaga: Liczba 17 jest optymalna: gdyby ich było 16 (lub mniej), to można by je ustawić na dwóch kolumnach i wtedy trójka wzajemnie nie atakujących się wież nie istnieje!

9. *a*) 23; *b*) 14

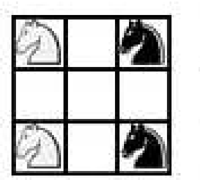
10. Z**E**W, E**W**A, OWC**A**, **O**SA, E**C**HO, **S**OWA, OC**H**, C**Z**AS
11. n=19

12. *a*) Mat: białe K*g3*, A*f2*, czarne K*h1*. Jeśli przesunie się *arlekina* na *e2*, to uzyska się sytuację patową. (A=*arlekin*). Dla *arlekina* f(c4)= f(27)=17 , g(a1,h8)=g(1,64)=5; *arlekin* nie jest silniejszy od wieży
b) max=16
c) g(x,y)=3 nie jest możliwe dla gońca

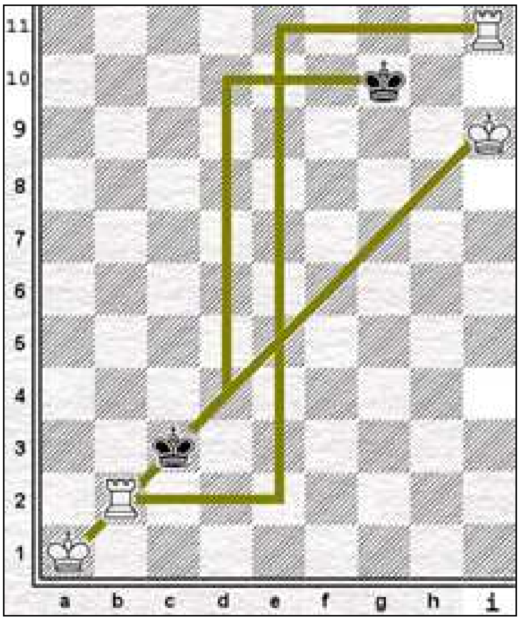
13. Można wykorzystać tu „motyw serpentyny”; patrz poniżej:



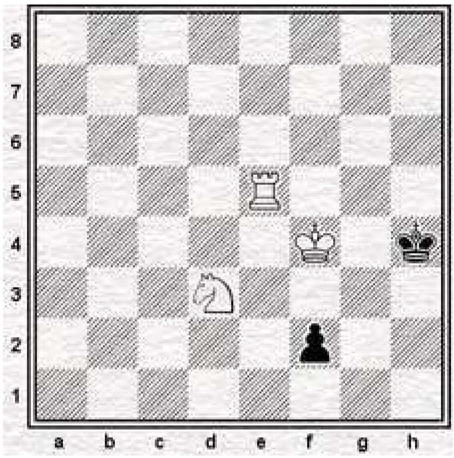
14. *wskazówka*: Doprowadzić najpierw do takiego układu:



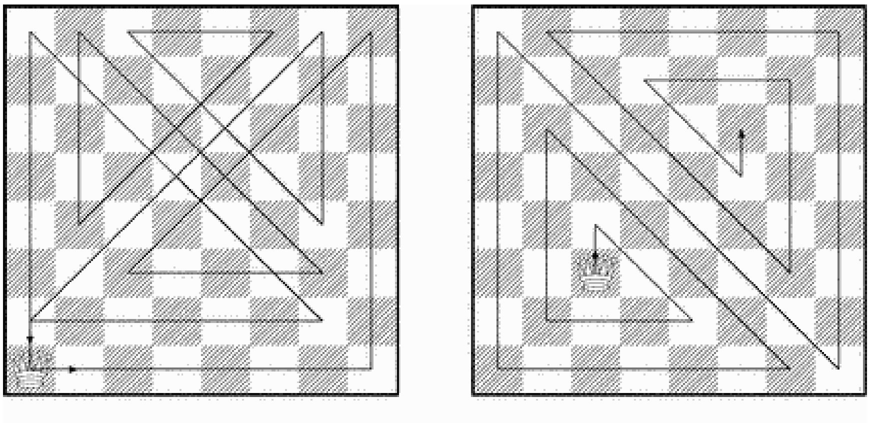
15. *a*) Liczba w danym polu jest równa sumie liczb w polach z nim sąsiadujących (tj. takich, że król może w jednym ruchu przejść z jednego na drugie), a położonych o jeden rząd niżej; brakujące liczby (wypisane rzędami) to:
4, 10, 16, 19, 16, 10, 4
5, 15, 30, 45, 51, 45, 30, 15, 5
b) Wystarczą cztery ruchy! Najpierw dowolny hetman wkracza na kolumnę, na której stoi król i daje mu szacha (zawsze jest to możliwe). Po odejściu króla na sąsiednią kolumnę tym razem to drugi hetman „zamyka króla w pionie” tj. ustawia się tak, że przestrzeń między hetmanami tworzą tylko dwie kolumny. W dalszej walce z królem pozostaną one już na kolumnach, na których stoją, więc modelem tej pozycji jest układ: hetmany na *c1* i *f8* a król dowolnie, lecz w kolumnie *d* bądź *e* (niech np. stoi on na *e5*). Teraz już dwa ruchy wystarczą by dać mata, np. H*cc5*+ K*e4* H*ff5* #
c) A jednak można zatrzymać króla! Po 1. W*e2*! nastąpi 1. .... K*d4* (nie ma sensu 1. ... K*d3*: król musi uciekać, a nie cofać się!), i teraz biały król goni czarnego, aż do piątego posunięcia:
2. K*b2* K*d5* 3. K*c3* K*d6* 4. K*d4* K*d7* 5. W*e11*! K*d8* 6. K*e5* K*d9* 7. K*f6* K*d10*. Król dogonił wieżę. I teraz 8. W*i11*! (odcięcie jednego kierunku ucieczki). 8. ... K*e10* 9. K*g7* K*f10* 10. K*h8* K*g10* 11. K*i9*! (diagram) Król został zamknięty w klatce 8x10. Mat jest nieunikniony!



16. Można, np. taką: jeśli 1. W*g5*?? to 1. ... *f1*H+ 2. K*e4* K:*g5* z wygraną czarnych . Gdy 1. S:*f2* to pat. I jeśli 1. S*e1*! to białe wygrywają: 1...*f1*H+ 2. Sf3+ K*h3* 3. W*h5*+ K*g2* 4. W*h2* mat



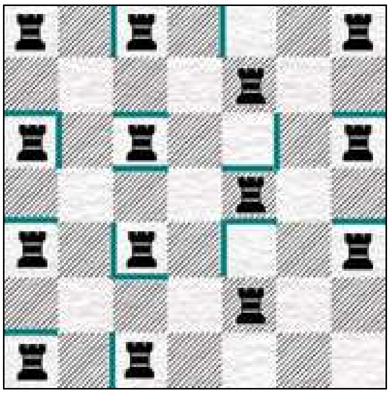
17. Poniżej na diagramie pokazano przykład takiej ścieżki (łamanej). Środki pól, na których stawał hetman są tu wierzchołkami łamanej, a odcinki łamanej obrazują kolejne ruchy figury. Łamana składa się z 15 odcinków (gdyż hetman wykonał 15 posunięć). Jest to tzw. łamana *zwyczajna* („bez samoprzecięć”). Można też o niej powiedzieć, że jest otwartą, gdyż hetman nie powrócił do pola na którym znajdował się na początku. Z lewej strony znajduje się inna łamana, pokazująca zamkniętą ścieżkę hetmana z pola *a1*. Jednak ta łamana (zamknięta) różni się od poprzedniej tym, że niektóre jej odcinki przecinają się (w punktach nie będących wierzchołkami). Taką łamaną nazywa się *wiązaną*.



18. G. Cantor, metoda przekątniowa; John H. Conway automat komórkowy; E. Dijkstra, najkrótsza ścieżka; L. Euler, cykl w grafie; M. Gardner, heksafleksagony ; G. W. Leibniz, system dwójkowy; B. Mandelbrot, fraktale; R. Penrose, parkietaże; C. Shannon, teoria informacji; S. Ulam, spirala liczb pierwszych

19. *a*) piony przechodzą same; suma=7
b) piony nie przechodzą same; suma=6

20. Można to zrobić tak:



21. Łatwiej jest wymyślić podział na dwie klasy: pięciu „twardzieli” i pięciu „mięczaków”; każdy ”twardziel” wygrywa z dowolnym ”mięczakiem” oraz z dokładnie dwoma innymi „twardzielami”; podobnie każdy ”mięczak” wygrywa z dokładnie dwoma innymi „mięczakami”. Rozkład na trzy klasy także jest możliwy: ci co biją pięciu: klasa 8 elementowa, ci co biją czterech: klasa 1 elementowa i ci co biją jednego: klasa 1 elementowa;
Uwagi: dana klasa grupuje osoby o zbliżonej sile gry, a więc im więcej jest klas, tym większe zróżnicowanie poziomu graczy.

22. Rozwiązanie zadań szachowych przedstawia się następująco:
1) H*b8*! (jedyny ruch, który daje białym wygraną); wobec groźby mata (H*h2#*) czarnopolowy goniec zostaje „zamrożony”
2) Nie muszą: jeśli wykonują kolejno posunięcia: 1. G*d2*, G*a5* i *b4*, to powstanie pat; mimo że czarne dorobią hetmana, to nie będą mogły dać szacha i wygrać, przeszkodzi im w tym układ pionów i położenie króla na *f1*

3) Błędem jest 1. H*d5* ? gdyż nastąpi 1. ... G*b8*! 2. H*b5*+ K*a7* 3. H:*c6* i pat. Poprawne jest 1. H*g1*+ K*b7* 2. H*g2* K*b6* (grozi K*b5* z utratą wieży) 3. H*f2*+ K*b7* 4. H*f3* K*b6* 5. H*e3*+ K*b7* 6. H*e4* K*b6* 7. H*d4*+ K*b7* 8. H*d5* z wygraną białych

4) Rozwiązanie jest niezwykłe! 1. Sc3+ i czarne mogą wybrać jedną z kilku możliwości: a) 1… Kb2 2.Sd1+ (z wygraną białych); b) 1… Ka1 2. Wa8+ Kb2 3. Sd1+ (także białe wygrywają); c) 1… Kc1 2. Se2+ z następnym Sg3 i także białe zwyciężają; d) ostatnia deska ratunku to: 1… Kc2 2. Sd1 (po promocji na hetmana, wieżę lub gońca wygrywa Se3+) 2… Kxd1 3. Kh8 (po 3…Gg4 4. Wf8 Ke2 5. Wxf2+ Kxf2 z remisem) i teraz po 3…f1H następuje 4. Wg1 i po Hxg1 następuje pat, a więc remis!

5) Wygrana: 1. *c6*+ K:*c6* (jeśli 1. ... K*e7* to 2. *c7*) 2. G*b6*! K:*b6* 3. K*f2* i po kilku szachach wieżą białe podchodzą królem do piona i wygrywają

6) Sytuacja stojącego w centrum króla jest tak fatalna, że wydaje się że każdy ruch tu matuje! A jednak jedyne 1. W*c6+* przedłuża opór czarnych, gdyż mogą zagrać 1. ... W:*h7*. Cała sztuka polegała na przesłonięciu gońca a8, który po odejściu wieży dawał szacha królowi, a także na pobiciu tego na h7. Może wydawać się, że ustawienie to jest całkiem nieprawdopodobne (choćby dlatego, że białe mają w nim dwa jednokolorowe gońce). Czy jednak jest ono niemożliwym...?

Odsyłacze

I. „Metody sztucznej inteligencji” Włodzisław Duch, *Szukanie, gry i ludzkie myślenie, Gry z oponentem* http://www.is.umk.pl/~duch/Wyklady/AI_plan.html
II. Artykuł „Krótka historia szachów” http://www.pionek.net/content/view/757/27/
III. Artykuł ”Szachowe umysły” http://jknow.republika.pl/geniusz/geniusz.html
IV. ”Knight’ s Tour Problem” http://www.tri.org.au/knightframe.html
V. Krótka historia matematyki (ebook) http://www.fuw.edu.pl/~kostecki/histmat.pdf
VI. WolframMathWorld (chess) http://mathworld.wolfram.com/Chess.html
VII. O grze hex http://home.earthlink.net/~vanshel/
VIII. Kings Tour http://en.wikipedia.org/wiki/Knight%27s_tour
IX. Motyw skoczka i gońca http://www.chessgames.com/perl/chessgame?gid=1135535
X. Gry dydaktyczne w nauczaniu matematyki http://publikator-nauczycielski.w.interia.pl/gry2.htm
XI. Zagadki logiczne www.mozgowiec.pl

Literatura

1. Hugo Steinhaus, *Kalejdoskop matematyczny*
2. Martin Gardner, *Ostatnie rozrywki, Hydry, jajka, i inne mistyfikacje matematyczne*
3. Raymond Smulyan, *Zagadki szachowe Sherlocka Holmesa*
4. Ian Stewart, *Krowy w labiryncie i inne eksploracje matematyczne*
5. Lech Pijanowski, *Skarbnica Gier*
6. MMM „*Gry w które gramy*” 2(3) 2003
7. Daniel King, *Szachy od pierwszego ruchu do mata*
8. Jurij Awerbach, Michaił Bejlin, *Wyprawa do krainy szachów*
9. Ewgienij Gik, *Szachy i matematyka* (po rosyjsku)

Autor artykułu ma na imię **Paweł** i pochodzi **z Krakowa**. Jest pasjonatem matematyki oraz szachów jak też aktywnym i lubianym uczestnikiem na takich forach internetowych jak: www.matematyka.pl oraz www.szachowe.pl (jako forumowicz występujący pod nazwą *mol_książkowy*). Jego jedno z ulubionych motto brzmi: „*Musimy wiedzieć, będziemy wiedzieć*” (David Hilbert). Uwielbia różne zagadki, łamigłówki oraz zadania w których trzeba wykazać się umiejętnościami nieszablonowego myślenia.